

## **APÊNDICE 1: APRESENTAÇÃO DAS PROVAS DOS LEMAS DO CAPÍTULO 4**

Os lemas 1 a 4 dizem respeito a resultados concernentes à teoria de sistemas lineares.

**prova do lema L1:** Com relação à base  $Z$  temos que  $AZ = \begin{bmatrix} 0 & AZ_2 \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}$ . Qualquer

elemento  $x \in \mathbb{R}^n$  tem a seguinte estrutura em relação à base  $Z$ :  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ . Seja

$u \in \mathfrak{K}$ , então  $Au = 0$ . Logo em relação à base  $Z$  temos:  $\begin{bmatrix} 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = 0$ . Em

relação à base  $Z$ , qualquer aplicação  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  terá a seguinte estrutura

$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ . Sejam  $u, v \in \mathfrak{K}$ . Se  $H \in \Theta$  então  $\langle u, Hv \rangle = 0 \Rightarrow H_{11} = 0$  e a prova da

primeira parte do lema está completa. A passagem da representação da aplicação de uma base a outra é feita como:  $\bar{H} = Z^{-1}HZ$ . Se  $Z$  é ortogonal então  $Z^{-1} = Z^T$ .

Logo,  $\bar{H}^T = (Z^{-1}HZ)^T = Z^T H^T Z^{-1T} = Z^{-1}HZ = \bar{H}$ . Logo, se  $H \in \Theta$  e se  $H$  é simétrica e se  $Z$  é ortogonal,  $H_{12} = H_{21}$ .

**prova do lema L2:** Se  $H \in \Xi$  então, analogamente ao que foi feito no lema L1, podemos obter a seguinte representação matricial para  $H$  em relação à base  $Z$ :

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix}$ . Ainda,  $A$  em relação à mesma base tem a seguinte estrutura

$A = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}$ ;  $\tilde{A}: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Seja  $P: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $PA$  terá a seguinte

representação em relação à base  $Z$ :  $\begin{bmatrix} 0 & P_1 \tilde{A} \\ 0 & P_2 \tilde{A} \end{bmatrix}$ , sendo

$P_1: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ ;  $P_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ . Ainda, em relação a uma base ortonormal da

imagem de  $A$ ,  $\tilde{A}$  tem a seguinte representação  $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ , sendo  $I$  a identidade de dimensão  $n-k$  e  $P_2$  terá a seguinte estrutura  $P_2 = \begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ , sendo  $P_{21}: IR^{n-k} \rightarrow IR^{n-k}; P_{22}: IR^{m-n+k} \rightarrow IR^{n-k}$ . Logo, se tomarmos  $P_1 = 0$ ,  $P_{21} = H_{22}$  e  $P_{22}$  como sendo qualquer aplicação  $P_{22}: IR^{m-n+k} \rightarrow IR^{n-k}$ , temos que  $P_2 \tilde{A} = H_{22}$  e logo  $H = PA$ , c.q.d..

**prova do lema L3:** Se  $A \in IR^{m \times n}$  então  $A$  tem a seguinte estrutura geral:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}; \text{ onde } a_i^T \in IR^n$$

Se existem  $j$  linhas LD em  $A$ , então estas podem ser expressas como combinações lineares das demais, ou seja,  $a_j$  pode ser escrita como:

$$a_j = \langle g_j, a_i \rangle = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m g_{j,i} a_i; g_j \neq 0 \in IR^n. \text{ Logo, } A \text{ pode ser expressa como:}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \langle g_j, a_i \rangle \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \text{ onde } j \text{ corresponde às linhas LD}$$

Seja,  $E$  uma matriz constituída de vetores unitários, sendo que cada elemento não nulo dos vetores ocupa a linha correspondendo a uma linha LD em  $A$ . Então,  $EE^T$  terá a seguinte estrutura geral:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

i.e., apenas alguns poucos  $j^{\text{ésimos}}$  elementos da diagonal principal de  $EE^T$  serão não nulos e as suas posições correspondem às  $j^{\text{ésimas}}$  linhas LD de  $A$ . Portanto a estrutura de  $EE^T(AA^T + EE^T)^{-1}$  terá a seguinte forma genérica:  $\begin{bmatrix} 0 & t_i^T & 0 & t_i^T \end{bmatrix}^T$ , onde  $t_i$  é um vetor qualquer de dimensão  $n$ . Logo resta mostrar que  $t_i = g_i$ .

Seja  $P$  uma matriz de permutação unitária ( $P=P^{-1}$ ), dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ -g_{j,1} & -g_{j,2} & \cdots & 1 & -g_{j,n} \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}.$$

A matriz  $P$  transforma as linhas LD em  $A$  em linhas nulas em  $PA$ . Da estrutura de  $EE^T$  e de  $P$  temos  $PEE^T = EE^T$ . Logo temos que:

$$F \stackrel{\Delta}{=} PAA^T + PEE^T = \begin{bmatrix} a_1 a_1^T \\ a_2 a_2^T \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} a_k a_k^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente, vem que:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} w_k \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{ sendo } w_k \neq 0; \forall k. \text{ Portanto temos que:}$$

$$EE^T(AA^T + EE^T)^{-1} = EE^T(PP(AA^T + EE^T))^{-1} =$$

$$EE^T(PAA^T + EE^T)^{-1} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_i \\ 0 \\ \vdots \\ g_i \end{bmatrix}$$

e a prova está completa.

**prova do lema L4:** Cada afirmação será provada em seguida.

(afirmação 1) - Pelo teorema de Penrose temos que qualquer solução de  $A_n x_n = b$  é dada por  $x_n = A_n^+ b + (I - P_{A_n^H})z$ . Seja  $P$  uma matriz de permutação definida como  $P = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ . Assim, para a primeira parte da afirmação basta provar que  $x_s$  dado por  $x_s = P A_n^+ b$  é solução de  $Ax=b$  e que a matriz  $P_s$  definida por  $P_s = P P_{A_n^H}$  forma uma projeção ortogonal de  $A$ .

$x_s$  é solução: A pseudo-inversa de Penrose de  $A_n$  é dada por:

$$A_n^+ = \begin{bmatrix} A^T \\ E^T \end{bmatrix} (AA^T + EE^T)^{-1} \text{ e ainda temos que } A_n A_n^+ = I. \text{ Logo,}$$

temos a seguinte relação:

$$AA^T(AA^T + EE^T)^{-1} = I - EE^T(AA^T + EE^T)^{-1} \quad (*)$$

Usando o lema L3 e como o sistema de equações é indeterminado e portanto existem soluções temos que:

$$EE^T(AA^T + EE^T)^{-1}b = 0 \quad (**)$$

Usando (\*) e (\*\*) vem que:

$$Ax_s = A P A_n^+ b = AA^T (AA^T + EE^T)^{-1} b = (I - EE^T (AA^T + EE^T)^{-1}) b = b - 0 = b, \text{ c.q.d.}$$

$P_s$  é projeção ortogonal de  $A$ : basta provar que  $P(I - P_{A_n^H})$  é base para

$\ker(A)$ , o que é trivial, pois:

$$Z = (I - P_{A_n^H}); Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}; A_n Z = 0 \Leftrightarrow AZ_1 + EZ_2 = 0 \Leftrightarrow AZ_1 = 0 \text{ (} Z_2 = 0 \text{)}$$

e logo  $PZ=Z_1$  é base para  $\ker(A)$ .

$x_b=0$ : temos que como do item precedente  $Z_2=0$ , então a solução de  $A_n x_n = b$

$$\text{é dada por } x_n = A_n^+ b + (I - P_{A_n^H})z = \begin{bmatrix} x_s + x^c \\ x_b \end{bmatrix} \text{ e assim } x_b \text{ é dado pelas}$$

últimas linhas de  $A_n^+ b$ , a saber  $x_b = E^T (AA^T + EE^T)^{-1} b$ , logo  $x_b=0$ .

(afirmação 2) - Sem perda de generalidade considere que as primeiras  $k$  linhas de  $A$  sejam de posto pleno. Caso não fossem, bastaria efetuar uma permutação

entre as linhas e a demonstração que segue permanecerá inalterada.

Assim, dado o particionamento  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ , em que  $A_1$  é de posto de linha

pleno, a estrutura de  $A_n$  será dada por  $A_n = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & \bar{E} \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{E} \end{bmatrix}$ .

**as primeiras  $n$  linhas de  $x_n$  são solução:** é trivial. Como  $A_n$  tem posto  $m$

temos que  $A_n x_n = b$  forma um sistema indeterminado e assim qualquer

solução  $x_n$  é tal que  $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \end{bmatrix} x_n = b_1$ .

**o resíduo é dado por  $\|x_b\|_2^2$ :** Como  $A_1 x = b_1$  o resíduo será dado por

$\|A_2 x - b_2\|_2^2$ . Ainda, por definição temos que  $x_b = b_2 - A_2 x$  e como o

sistema é impossível,  $x_b \neq 0$  e a prova está completa.

O lema L5 se refere à caracterização da condição necessária para se ter um problema da PQ crítico. Note que a definição de problema crítico está associada ao uso de algum algoritmo de conjuntos ativos. A idéia deste algoritmo é obter-se um dado conjunto de restrições que deverão estar ativas e para as quais o sistema de KKT tenha solução que é viável quanto às restrições não ativas. Parte-se, então, de um dado conjunto de restrições e é verificado se KKT tem solução. Se existem multiplicadores de Lagrange associados a restrições de desigualdade com componentes negativos, então estas devem ser retiradas do conjunto ativo. Restrições violadas devem ser incorporadas. Procede-se desta forma, i.e., introduzindo-se e retirando-se restrições até que se obtenha uma solução de KKT. Assim, o algoritmo irá ciclar se a partir de um certo instante restrições que são retiradas do conjunto ativo voltarem a ser ativas logo em seguida.

**prova do lema L5:** Se o termo quadrático do problema da PQ for uma matriz PD ou PSD temos um problema de programação convexo, para o qual as soluções estacionárias serão de mínimo e estarão ou contidas no interior da região viável ou então a solução ótima estará na fronteira. Assim, nestes casos a condição de KKT corresponderá a um ponto que ou estará no interior da região viável ou na fronteira. Assim, não é possível gerar uma direção que caminhe para fora da região viável e conseqüentemente o algoritmo de conjuntos ativos não poderá ciclar. Assim, uma condição necessária para que o algoritmo de conjuntos ativos

cicle é que o Hessiano tenha pelo menos um autovalor negativo. Para uma visualização disto, considere o seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 - x_2^2 + 7x_2 \\ \text{s.a. } -3 \leq x_1 \leq 3 \\ \quad -3 \leq x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

Se partirmos do conjunto ativo correspondente a  $x^o = [3 \ 3]^T$ , temos que o multiplicador de Lagrange de ambas as restrições serão negativos. Assim, retira-se uma delas e para o novo sistema de KKT, o multiplicador de Lagrange continua negativo e esta restrição é retirada. Aí, resolve-se o problema irrestrito que tem solução estacionária  $x = [0 \ 3.5]^T$  que é inviável e aí ativa-se a restrição de limite superior para  $x_2$  e o algoritmo volta para a solução intermediária e irá ciclar.

Os lemas L6 a L12 tratam das condições de otimalidade de problemas da PQ convexos e não convexos. Ainda, a preocupação é com relação à caracterização de soluções estacionárias locais, assim a forma padrão do problema da PQ que se quer resolver é dada em (A.1). Esta forma padrão se aplica a todos os problemas da PQ neste apêndice.

$$f(d^*) = \min_{d \in X_I} f = \frac{1}{2} d^T H d + c^T d; X_I = \{d \in \mathbb{R}^n : A_E d = b_E; A_I d \leq b_I\} \cap B_\delta(d^*) \quad (\text{A.1})$$

sendo,  $H, c^T, A_E, A_I$ , aplicações lineares da forma:  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A_E: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A_I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  e  $B_\delta$  uma bola aberta de raio  $\delta$  em torno de  $d^*$ .

A condição de KKT para (A.1) é dada pelo sistema em (A.2).

$$\begin{bmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$\mu_i \geq 0$  se  $i \in I_j$

sendo que  $A \in \mathbb{R}^{a \times n}$  inclui as restrições de igualdade e as restrições de desigualdade ativas,  $I_j$  contém o índice das restrições ativas e  $b$  inclui  $b_E$  e os elementos de  $b_I$  correspondentes a  $I_j$  e  $a$  é o número de restrições ativas.

Associado a (A.1) existe o problema de maximização da função quadrática, a saber:

$$f(d^*) = \max_{d \in X_l} f \quad (\text{A.3})$$

sendo,  $f$ ,  $d$ ,  $d^*$  e  $X_l$  definidos como no problema (A.2).

Ainda, para a apresentação das provas alguns resultados enunciados no capítulo 4 são necessários, a saber o corolário C1 e a seguinte condição extraída de Nemhauser et ali (1989):

*condição p3:* se  $H$  for PD no plano tangente às restrições ativas, então  $d$  que satisfaz (KKT) para estas e que é viável quanto às outras restrições, será solução ótima de (A.1)

**prova do lema L6:** A prova de (k1) é trivial, uma vez que se  $A$  for de posto deficiente,

$$\begin{bmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \text{ também será e aí ou existiram infinitas soluções para (A.2) ou nenhuma.}$$

Se  $a=n$ , teremos de k1 que  $d$  é único e assim como o sistema de KKT é de posto pleno e igual a  $2n$  existem  $d$  e  $\mu$ . Assim, iremos nos ater à prova de k2 para o caso em que  $a < n$ . Primeiramente mostraremos que se  $Z^T H Z$  possuir pelo menos um autovalor nulo, então (A.2) ou terá mais de uma solução ou não terá nenhuma. Em seguida, mostraremos que se (A.2) tiver mais de uma solução finita,  $Z^T H Z$  terá pelo menos um autovalor nulo.

Seja  $Z$  uma base para  $\text{nul}(A)$ , então qualquer solução de  $Ad=b$  pode ser escrita como:

$$d = Zy + \bar{d} \quad (\text{i})$$

sendo,  $\bar{d}$  uma solução particular qualquer de  $Ad=b$  (isto é decorrência do teorema de Penrose). Ainda,

$$Z^T A^T = 0 \quad (\text{ii})$$

Assim, considerando (ii), de (A.2) temos que:

$$Z^T H d + Z^T A^T \mu = Z^T H d = -Z^T c \quad (\text{iii})$$

Substituindo (i) em (iii) temos que:

$$Z^T H Z y = \bar{c}; \bar{c} = -Z^T c - Z^T H \bar{d} \quad (\text{iv})$$

Se  $Z^T H Z$  tiver pelo menos um autovalor nulo  $Z^T H Z$  será singular e então (iv) ou não terá solução finita  $y$  ou  $y$  não será único e a prova está completa quanto ao somente se.

Resta pois provarmos o se do lema. Suponha que existam  $d_1$  e  $d_2$  distintos e finitos tais que (A.2) se verifica. Ainda, suponha que  $Z^T H Z$  seja não singular. (A.2) vale para  $d_1$  e para  $d_2$ . Subtraindo as relações obtidas para cada uma das soluções temos que:

$$\begin{aligned} H(d_1 - d_2) + A^T(\mu_1 - \mu_2) &= 0 \\ A(d_1 - d_2) &= 0 \end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} (d_1 - d_2)^T H(d_1 - d_2) &= 0, \quad \text{mas } d_1 \text{ e } d_2 \text{ podem ser expressos por} \\ d_1 &= Z y_1 + \bar{d}; d_2 = Z y_2 + \bar{d}; y_1 \neq y_2 \quad \text{e assim temos que} \\ (y_1 - y_2)^T Z^T H Z (y_1 - y_2) &= 0 \text{ e portanto } Z^T H Z \text{ possui pelo menos um autovalor} \\ \text{nulo, a contradição está formada e portanto a prova está completa.} \end{aligned}$$

**prova do lema L7:** Seja  $Z$  uma base para  $\text{nul}(A)$  e  $\bar{d}$  uma solução particular das restrições ativas. Considere o seguinte problema da PQ:

$$\begin{aligned} \min_d \quad & \frac{1}{2} d^T H d + c^T d \\ \text{s.a.} \quad & A d = b \end{aligned} \quad (\text{i})$$

O problema (i) pode ser expresso em termos da base  $Z$  como:

$$\min_y \quad \frac{1}{2} y^T Z^T H Z y + (\bar{d}^T H + c^T) Z y \quad (\text{ii})$$

Note que por definição de  $A$ ,  $d$  que é solução de (A.2) é solução viável para as restrições que não estão ativas. Logo, da teoria de cálculo,  $d$  solução de (A.2) será solução de máximo do problema reduzido irrestrito (ii) se  $Z^T H Z$  for ND, o que ocorre já que  $H$  é ND. Logo, existirá uma direção viável ao longo do problema (ii) para a qual a função objetivo decresce. Como a região viável é aberta, então a solução não será finita (e.g. considere  $a=n$ ).

**prova do lema L8:** Se  $a < n$  e se formarmos um problema reduzido como na prova do lema L7, teremos que  $Z^T H Z$  será ND, para qualquer  $A$  escolhido e logo existirá



uma direção viável que irá provocar o decréscimo da função objetivo e (A.2) não será solução de (A.1). Logo  $a=n$  é condição necessária para que uma dada solução de (A.2) possa ser solução de (A.1). Resta pois verificarmos que se existir pelo menos um componente nulo em  $\mu$ , então a solução de (A.2) não será solução de (A.1). Sem perda de generalidade, considere que o problema (A.1) tenha apenas restrições de desigualdade (e.g. basta aplicar uma decomposição em relação à base do espaço nulo das restrições de igualdade), ou seja, o problema da PQ que se quer resolver será da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} d^T H d + c^T d \\ \text{s.a.} \quad & A d \leq b \\ & A \in \mathbb{R}^{a \times n} \end{aligned} \quad (i)$$

Ao problema (i) está associado o seu problema dual, dado por (ii):

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{1}{2} d^T H d - b^T \mu \\ \text{s.a.} \quad & H d + A^T \mu = -c \\ & \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (ii)$$

Se existe algum componente nulo em  $\mu$  em (ii), então vemos que a solução de (ii) será a mesma de um problema (i), em que  $A$  é formado como sendo o  $A$  original excluindo-se todas as restrições para as quais  $\mu=0$ . Para este problema temos que  $a < n$  e logo do lema L2 temos que a solução de (A.2) não será solução de (i) e a prova está completa.

**prova do lema L9:** Consideremos primeiramente a situação em que  $a=n$ . Neste caso não se define  $Z$ . Assim, para sabermos se a solução de (A.2) é solução de (A.1), vamos considerar a natureza de  $H$ . Se  $H$  não contiver autovalores negativos, temos o caso trivial. Do lema L8, temos que se  $H$  não contém autovalores positivos, existir algum componente nulo em  $\mu$ , implica que  $d$  não é solução de (A.1) e neste caso temos a condição em k4, uma vez que bastaria considerar o problema (A.1) retirando-se de  $A$  todas as restrições com  $\mu=0$ . Para estes problemas, teremos que  $Z^T H Z$  é ND e assim, em relação ao problema reduzido a solução estacionária obtida de (A.2) corresponde à de máximo local (basta considerar o problema  $H=-H$ ). Resta pois o caso em que  $H$  têm autovalores positivos e negativos. Analogamente, ao que foi feito no lema L8, teremos que se existirem

componentes nulos em  $\mu$ , poderemos eliminar estas restrições de  $A$  e a solução do problema não se afetará, i.e. poderá ser ou não solução (afirmações k3 e k5).

Assim, para a discussão que segue iremos considerar que  $a < n$ . Se (A.2) tem solução única então  $Z^T QZ$  não possui autovalores nulos. Logo  $Z^T QZ$  será ou PD, ou ND ou indefinida. No caso de ser PD temos uma solução local ou global de mínimo (da condição p3), nos demais casos pode tratar-se de uma solução de máximo local (ND) ou de sela (ND ou indefinida).

**prova do lema L10:** Se  $a=n$  e  $A$  é de posto pleno, então o sistema (A.2) tem solução única, logo ou  $a < n$  ou se  $a=n$  devemos ter restrições LD e redundantes em  $A$ . O fato de que existem restrições redundantes advém do fato de termos infinitas soluções em (A.2), as quais se caracterizam por infinitas soluções para os multiplicadores de Lagrange associados às restrições que se apresentem combinadas. Ainda, quando  $a=n$  e  $A$  não é de posto pleno, então  $Z^T HZ$  será de dimensão  $q \times q$ ,  $q \geq 1$  (já que  $a$  é não nula). Logo, sem perda de generalidade consideraremos o caso em que  $a < n$  e em que  $A$  é de posto de linha pleno (quando  $A$  não for de posto pleno, é porque algumas restrições podem ser retiradas e o raciocínio permanece inalterado). A situação que temos quando  $Z^T HZ$  é não nula é análoga à do lema L4, o que ocorre é que quando tivermos autovalores nulos existirá mais de uma solução que atende a cada uma das afirmações k6 e k7.

**prova do lema L11:** Seja  $M$ , a matriz dada por  $M = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$ . Se

$a < n \Rightarrow \text{rank}(M) \leq 2a < a + n = \dim(M)$  e assim (A.2) não teria solução única. Analogamente, se  $a = n$  e  $A$  é de posto não pleno, temos que  $\text{rank}(M) \leq 2(n-1) < 2n = \dim(M)$ . Assim,  $a = n$  e  $A$  de posto pleno é condição necessária para que (A.1) tenha solução única. A prova de que (A.2) é solução de (A.1) é decorrência do corolário C1. O que temos é que (A.1) é um problema da PL, dado por:

$$\min c^T d$$

$$s.a. \begin{bmatrix} A \\ A_{I_i} \end{bmatrix} d \leq \begin{bmatrix} b \\ b_{I_i} \end{bmatrix} \quad (*)$$

sendo que  $I_i$  contém o índice das restrições que não estão ativas em (A.2). Seja, o problema da PL dado por (\*\*)

$$\begin{aligned} & \min c^T d \\ & \text{s.a.} \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{I_i} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b_{I_i} \end{bmatrix} \quad (**) \end{aligned}$$

Do corolário (\*\*) percebemos que a solução de (A.2) é solução ótima de (\*\*) com  $d_e \geq 0$ . Logo, (A.2) é solução ótima de (\*).

**prova do lema L12:** A prova de (i) é trivial, pois se  $a = n$  e  $A$  é de posto pleno, (A.2) tem solução única (lema L6). Assim, sem perda de generalidade consideremos  $a < n$  e  $A$  de posto pleno (se  $A$  for não pleno, basta retirar todas as restrições LD e o raciocínio permaneceria inalterado). Do corolário C1 temos que (A.2) é solução do seguinte problema da PL:

$$\begin{aligned} & \min c^T d \\ & \text{s.a.} Ad = b \quad (*) \end{aligned}$$

Para este caso (A.1) é dado por:

$$\begin{aligned} & \min c^T d \\ & \text{s.a.} \begin{bmatrix} A \\ A_{I_i} \end{bmatrix} d \leq \begin{bmatrix} b \\ b_{I_i} \end{bmatrix} \quad (**) \end{aligned}$$

sendo que  $A_{I_i}$  indica as restrições que não estão ativas em (A.2). Seja o problema dado por (\*\*\*):

$$\begin{aligned} & \min c^T d \\ & \text{s.a.} \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{I_i} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_e \end{bmatrix} = b \quad (***) \end{aligned}$$

(\*\*\*) é equivalente a (\*\*) desde que  $A$  indique as restrições que devem estar ativas. Mas a solução de (\*) é também solução ótima de (\*\*\*). Logo a solução de (\*) é também solução ótima de (\*\*) e assim (A.2) é solução de (A.1). Uma outra forma de visualizar este resultado é observar que dado o particionamento de  $A$  como  $[A_1 \ A_2]$ , sendo  $A_1$  de posto pleno e conseqüentemente  $c$  pode ser particionado como  $c^T = [c_1^T \ c_2^T]$ , temos que como o sistema de KKT é indeterminado então existe uma matriz  $P$  tal que  $A_2 = A_1 P$ ;  $c_2 = P^T c_1$ . Como  $A_1$  é de posto pleno então temos que:  $Ad = b \Rightarrow d_1 = A_1^{-1}(b - A_2 d_2)$  e assim  $c^T d = c_1^T A_1^{-1} b$  para todo  $d \in \mathbb{R}^n$ ; tq.  $Ad = b$ .

Os lemas L13 a L19 dizem respeito ao algoritmo MISQPSOL. Assim, nestes o problema da PQ que se considera não contém restrições de igualdade, uma vez, que o algoritmo MISQPSOL efetua uma decomposição da região viável em relação a uma base para o espaço nulo das restrições de igualdade. Assim, nas provas que seguem  $m = 0$ .

**prova do lema L13:** Neste lema, estamos analisando o posto da matriz  $A$  das restrições ativas e não do sistema de KKT. Assim, a primeira restrição de  $A$  só será LD se ela for nula. Como restrições nulas são retiradas, ou seja, elas não são incorporadas ao problema da PQ e são tratadas isoladamente, então a matriz de restrições ativas não conterá linhas nulas e conseqüentemente a primeira linha será LI por definição. Desta forma, quando  $A$  não for de posto pleno, é porque conterá linhas LD que serão retiradas, uma vez que aos seus multiplicadores de Lagrange serão atribuídos valores negativos. Desta forma, todas as restrições redundantes serão retiradas. Assim, a partir de uma certa iteração  $A$  só será de posto não pleno se o problema da PQ for inviável.

**prova do lema L14:** Do lema L13 temos que se  $A$  for de posto deficiente, então ou existem restrições redundantes ou o problema da PQ é inviável. Para o último caso, o que temos é que a restrição LD em  $A$  será eliminada do conjunto ativo, mas como no caso da PQ inviável ela é necessária, então ela voltará a ser ativada. Daí na iteração seguinte,  $A$  será obrigatoriamente de posto deficiente e o algoritmo não irá convergir. Resta verificar que sempre a partir de uma certa iteração, teremos  $A$  de posto não pleno. Se  $A$  for de posto pleno e nenhuma outra restrição for violada, então encontra-se uma solução estacionária e o problema da PQ é viável, contrariando a hipótese original.

**prova do lema L15:** Se existirem restrições redundantes, elas serão em algum momento LD e serão eliminadas e não mais aparecerão na matriz de restrições ativas. Assim, sem perda de generalidade, consideremos que o problema da PQ não apresenta restrições redundantes. Se o problema da PQ é ardiloso, então isto significa que existe pelo menos uma restrição que quando ativa será LD em relação às primeiras  $n$  linhas do sistema de KKT. Inicialmente, esta pode ocupar qualquer posição da matriz de conjuntos ativos. Como ela é LD, o seu

multiplicador de Lagrange será negativo. O mesmo se sucede com todas as restrições que formam o problema arduoso. Ainda, de uma iteração a outra, apenas uma restrição LD é eliminada por vez, enquanto que mais de uma violada pode ser ativada. Assim, o que temos de provar é que o algoritmo pode não convergir em um número finito de iterações e que neste caso a cada duas iterações teremos pelo menos uma restrição arduosa ocupando a primeira linha da matriz de conjuntos ativos e que o resíduo do sistema de KKT estendido será não nulo. A prova de que o algoritmo pode não convergir é trivial (basta observar o exemplo E2 do capítulo 4 com  $a=-1$ ). Neste ponto, cabe comentar que duas situações distintas ocorrem. Primeiramente, as restrições arduas podem não ser violadas e aí elas não serão incorporadas à matriz ativa. A situação que devemos considerar é quando as restrições arduas são necessárias e violadas e assim não podem ser ignoradas. No caso de termos apenas uma restrição arduosa, ela obrigatoriamente irá ocupar a primeira linha da matriz de conjuntos ativos, já que todas as restrições são introduzidas nas primeiras linhas (lembre-se que foi assumido que o problema da PQ é viável). Quando ela não for consistente em relação às primeiras  $n$  linhas do sistema de (KKT), o sistema de KKT não tem solução e o resíduo do sistema de KKT estendido será não nulo. Analogamente, ocorre quando temos mais de uma restrição arduosa. Neste caso, e.g., as duas últimas iterações podem ter resíduo não nulo.

**prova do lema L16:** Primeiramente vamos considerar o caso em que  $p = 0$  ou  $a = p \leq n - 2$ , ou seja, ou não existem restrições de desigualdade, ou todas elas estão ativas. Como o problema da PQ é não vazio e não contém restrições redundantes, então a partir de uma certa iteração,  $A$  será de posto pleno. Assim, consideremos o problema reduzido em relação às restrições ativas. Como o sistema de (KKT) do sistema reduzido é vazio, então este não admite solução estacionária. Logo existe uma direção para a qual a função objetivo decresce ilimitadamente e o problema não terá solução finita. Considere agora que haja restrições não ativas. Se a direção não finita for viável em relação às restrições inativas então o problema tem solução global não finita. Assim, vamos supor que o problema tenha uma solução local finita. Enquanto o sistema de KKT for inconsistente, o problema reduzido em relação às restrições ativas não admitirá

solução estacionária e logo não terá solução finita. Assim, uma condição necessária para que exista pelo menos uma solução local finita é que exista um dado conjunto ativo  $A$  para o qual exista  $d_r$  tal que  $Z_a^T H Z_a d_r = -Z_a^T c - Z_a^T H \bar{d}$ , logo enquanto existir um número suficientemente elevado de restrições não ativas (e.g.  $p \geq n \Rightarrow$  se  $a = n \Rightarrow \exists$  solução finita) sempre será possível obter uma solução finita.

**prova do lema L17:** Primeiramente iremos provar que cada afirmação é verdadeira e depois que nenhuma outra possibilidade existe. A prova de (i) e (ii) é trivial. (i) decorre do lema L14 e (ii) do lema L13. A situação (iii) pode ocorrer na seguinte situação. Suponha que o problema da PQ possua  $p < n - 1$  restrições e que todas estão ativas, i.e.,  $a \leq n - 2$ . Se formarmos o problema reduzido em relação a estas restrições, i.e.,  $Z_a$  é base para  $\text{nul}(A)$ ,  $\bar{d}$  uma solução particular das restrições ativas e se  $Z_a H Z_a d_r \neq -Z_a^T c - H \bar{d}$ , então o problema reduzido não admite solução estacionária e neste caso a solução do problema é não finita (existe uma direção viável que faz com que a função objetivo tenda a  $-\infty$ ). A situação descrita em (iv) é um pouco mais delicada. A idéia é que o algoritmo não é capaz de enxergar o vértice correspondente à solução estacionária de mínimo. Um exemplo foi mostrado no exemplo E4 do capítulo 4. A situação em (v) corresponde a se ter obtido uma solução estacionária quanto às restrições ativas e viável quanto às demais. Ainda, as soluções obtidas nos lemas L10 e L12 são exemplos em que (v) ocorre. Assim, resta verificarmos que apenas uma das cinco situações ocorre. O sistema de (KKT) não será de posto pleno se pelo menos uma das seguintes três situações ocorrer:

- (I)  $A$  é de posto não pleno (corresponde às situações (i) e (ii))
- (II) existem linhas em  $A$  que são LD em relação a  $\begin{bmatrix} H & A^T \end{bmatrix}$ . Esta é a situação dos problemas ardilosos que foram excluídos do presente lema e logo esta situação não ocorre.
- (III)  $\begin{bmatrix} H & A^T \end{bmatrix}$  é de posto de linha deficiente. Podemos assumir que  $A$  seja de posto pleno, já que em caso contrário temos as situações (i) e (ii). Assim, teremos no máximo  $n-2$  restrições ativas (lembre-se que uma variável é artificial e no caso de  $n-1$  restrições ativas a referida matriz é de posto

pleno). Logo, podemos considerar o problema irrestrito em relação às restrições ativas. Teremos o seguinte sistema a ser resolvido para a obtenção da solução de KKT:  $Z_a H Z_a^T d = -Z_a c - H \bar{d}$  (1), sendo  $Z_a$  base para o espaço nulo das restrições ativas. O sistema (1) é de posto não pleno, assim ou existirão infinitas soluções ou nenhuma. No último caso, isto corresponde a se ter um resíduo do sistema de KKT estendido não nulo e isto corresponde ou à situação (iii) ou (iv). No caso de existirem infinitas soluções estacionárias temos a situação (v).

**prova do lema L18:** Se a presença de restrições ardilosas não afeta a solução do sistema de KKT (i.e., o resíduo do sistema de KKT estendido é nulo) então, uma vez retiradas as restrições, elas não serão incorporadas ao conjunto ativo e o algoritmo poderá convergir para uma solução estacionária. No caso em que isto não ocorre, o que temos é que se as restrições ardilosas forem retiradas, elas voltarão a ser incorporadas ao conjunto ativo, uma vez que serão violadas. Isto só deixará de ocorrer quando alguma outra restrição for incorporada ao conjunto ativo que faça com que a restrição ardilosa deixe de ser LD em relação às primeiras  $n$  linhas do sistema de KKT. Enquanto existir pelo menos uma restrição ativa LD em relação às primeiras  $n$  linhas do sistema de KKT, será necessário encontrar pelo menos uma outra restrição para ser incorporada à matriz de conjuntos ativos. Assim, a não convergência em um número finito de iterações se dará quando estas restrições não forem incorporadas ao conjunto ativo ou quando não existirem restrições não ardilosas não ativas. Note que podem existir restrições propícias a serem incorporadas mas que podem não estar violadas e neste caso elas não serão adicionadas ao conjunto ativo.

**prova do lema L19:** A definição de um problema da PQ crítico é aquela em que o problema da PQ apresenta solução (finita ou não) e o algoritmo de conjuntos ativos não é capaz de encontrá-la. Neste lema, indica-se a condição em que isto ocorre, i.e., precisamos provar que quando a solução existe e o algoritmo não converge, é porque o conjunto de restrições que está ativo é tal que produz um valor negativo para o multiplicador de Lagrange de uma restrição que retirada será violada e assim será novamente introduzida ao conjunto ativo em algum momento. Se os multiplicadores de Lagrange forem positivos então nenhuma

restrição será eliminada e enquanto estes permanecerem positivos com a introdução de novas restrições o algoritmo irá convergir em um número finito de iterações. Assim, termos pelo menos um multiplicador de Lagrange negativo é condição necessária para que o algoritmo não convirja. Da mesma forma, se uma restrição que é retirada do conjunto ativo não for novamente incorporada ao conjunto ativo para ser posteriormente eliminada e assim sucessivamente, o algoritmo irá terminar em um número finito de iterações.



## **APÊNDICE 2: EXEMPLOS USADOS NA VALIDAÇÃO DO ALGORITMO MISQPSOL**

Neste apêndice, os exemplos usados para a validação do algoritmo MISQPSOL são listados e brevemente comentados. Ainda, os exemplos são classificados quanto à sua dimensão e dificuldade de resolução. As estimativas iniciais e as soluções estacionárias conhecidas são apresentadas bem como os parâmetros de precisão numérica empregados. As estimativas iniciais são divididas entre aquelas sugeridas pela literatura e aquelas propostas na presente tese para testar particularidades dos exemplos. Na apresentação dos exemplos, adotamos a seguinte nomenclatura:

NVAR ... número de variáveis reais do problema, i.e., sem a introdução da variável artificial como requerido pela forma padrão da PNL do algoritmo MISQPSOL, ou seja,  $NVAR=n-1$

NEQ ... número de restrições de igualdade

NIQ ... número de restrições de desigualdade

NTERM... número de termos constantes do problema conforme a definição de Dembo (1976) apresentada no capítulo 5 (este valor foi avaliado sempre em função de NVAR ao invés de  $n$ )

ITMAX ... número máximo de iterações para convergência (o mesmo valor foi usado para o algoritmo SQP e para o da programação quadrática, i.e.,  $k^{max} = k_{qp}^{max} = ITMAX$ )

DD ... dificuldade relativa do problema. É definida conforme apresentado em Dembo (1976), como:  $DD=NTERM-(NVAR+1)$

GD ... grau de dificuldade, definido no capítulo 5

As demais variáveis seguem a nomenclatura dos capítulos 2, 3 e 4. Os exemplos selecionados incluem problemas geométricos, problemas típicos da engenharia química e

problemas meramente matemáticos que apresentam complexidade elevada. As referências das quais os exemplos foram extraídas são citadas.

### EXEMPLO 1

**referência:** (Biegler & Cuthrell, 1985)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 + \frac{1}{2} x_3^2 \\ \text{s.a.} \quad & 1 + x_1 - x_2^2 \leq 0 \\ & 1 - x_1 - x_2^2 \leq 0 \\ & x_2 \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**caracterização das funções:**

**função objetivo:** linear

**restrições:** quadráticas e lineares.  
Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

**estatística do problema:**

$$\begin{aligned} X^0 &= \mathbb{R}^3 \\ \text{NVAR} &= 2 \\ \text{NEQ} &= 0 \\ \text{NIQ} &= 3 \\ \text{NTERM} &= 8 \\ \text{DD} &= 5 \\ \text{GD} &= 2 \end{aligned}$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

$$\begin{aligned} \text{propostas:} \quad x_a &= [0 \quad 0 \quad 0]^T \\ x_b &= [24 \quad 5 \quad 0]^T \end{aligned}$$

$$x_c = [1 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$\varepsilon_P: \quad 5 \times 10^{-5}$$

$$\text{ITMAX:} \quad 300$$

*observações:* as soluções iniciais adotadas são todas elas inviáveis. Para a estimativa nula ( $x_a$ ) problemas de convergência são citados na literatura (Biegler & Cuthrell, 1985).

*soluções conhecidas:*

$$\text{solução global:} \quad [0 \quad 1 \quad 0]^T$$

**Observações sobre as simulações:** quando a estimativa inicial é não nula e a matriz Hessiana é iniciada com a matriz identidade, o algoritmo não irá convergir para uma solução de mínimo ou máximo local. Isto ocorre, porque a direção que é gerada na primeira iteração é tal que na segunda iteração temos um problema da PQ degenerado viável, ou seja,  $\mu=0$  e a matriz Hessiana calculada por diferenças finitas será nula e portanto o sistema será indeterminado e a solução de mínima norma fará com que o algoritmo convirja para um ponto viável. A única alternativa para este caso é forçar a matriz Hessiana a ser PSD para algumas iterações, até que a solução obtida a nível da PQ deixe de ser degenerada.

## EXEMPLO 2

**referência:** (Edgar & Himmelblau, 1989)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_3^2 \\ \text{s. a.} \quad & -x_1^2 - x_2^2 = 25 \\ & -x_1 - x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

*caracterização das funções:*

**função objetivo:** quadrática

**restrições:** quadráticas e lineares.  
Inexistem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

**estatística do problema:**

$$X^0 = \mathbb{R}^3$$

$$\text{NVAR} = 2$$

$$\text{NEQ} = 1$$

$$\text{NIQ} = 1$$

$$\text{NTERM} = 6$$

$$\text{DD} = 3$$

$$\text{GD} = 4$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

*propostas:*  $x_a = [0 \ 0 \ 0]^T$

$$x_b = [5 \ 0 \ 0]^T$$

$$x_c = [0 \ 5 \ 0]^T$$

$$x_d = [1 \ 1 \ 0]^T$$

$\epsilon_P:$   $5 \times 10^{-5}$

ITMAX: 300

*observações:* Adotamos como uma das estimativas iniciais o vetor nulo, devido ao fato de que o gradiente da restrição de igualdade ser nulo e a restrição de desigualdade é satisfeita neste ponto. Além disso, o gradiente da função objetivo é nulo neste ponto e portanto esta é uma solução estacionária do problema irrestrito. As demais estimativas foram escolhidas de forma a se analisar a convergência global do algoritmo.

**soluções conhecidas:**

*solução global:*  $x_1 = [-3.536 \quad 3.536]^T$

$x_2 = [3.536 \quad -3.536]^T$

*solução estacionária:*  $x_M = [3.536 \quad 3.536]^T$  (solução de máximo)

**Observações sobre as simulações:** o algoritmo como foi desenvolvido não verifica a condição de segunda ordem. Assim, a convergência é para um ponto que satisfaça as condições de KT. Soluções máximas atendem também as condições de (KT). O que ocorre neste exemplo é que a direção  $[1 \quad 1]$  é tal que as restrições linearizadas serão LD e o algoritmo irá ignorar uma delas, sem que isto esteja relacionado a problemas da PQ inviáveis e a convergência não poderá se dar para o ponto de máximo, uma vez que sendo o Hessiano ND, duas restrições deverão estar ativas, o que não é possível. A não convergência não é peculiaridade do nosso algoritmo. Por exemplo o algoritmo SQP do software MATLAB também irá falhar para este caso. Ainda  $H_k$  é ND o que faz com que seja necessário ativar duas restrições o que deixa de ser possível pelo fato de ser a restrição  $[1 \quad 1]$  LD.

### EXEMPLO 3

**referência:** (Schmid & Biegler, 1994)

$$\min 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + \frac{1}{2}x_4^2$$

$$s.a. x_1^2 + x_2^2 - x_3^3 = 25$$

$$8x_1 + 14x_2 + 2x_3 = 56$$

*caracterização das funções:*

**função objetivo:** quadrática

**restrições:** quadráticas e lineares

Inexistem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

**estatística do problema:**

$$X^0 = \mathbb{R}^4$$

$$\text{NVAR} = 3$$

$$\text{NEQ} = 2$$

$$\text{NIQ} = 0$$

$$\text{NTERM} = 14$$

$$\text{DD} = 10$$

$$\text{GD} = 4$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

*propostas:*  $x_a = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

$$x_b = [2 \ 2 \ 2 \ 0]^T$$

$$x_c = [0 \ 0 \ 3.5 \ 0]^T$$

$$x_d = [-1 \ -2 \ -3 \ 0]^T$$

$$x_e = [10 \ 10 \ 10 \ 0]^T$$

$$x_f = [3 \ 1 \ 2.5 \ 0]^T$$

$$x_g = [3 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

$\varepsilon_P:$   $5 \times 10^{-5}$

ITMAX: 300

*observações:* uma estimativa foi escolhida como sendo o vetor nulo pelo fato de a primeira restrição de igualdade ter gradiente nulo neste ponto. Por outro lado a existência da segunda restrição garante que se realizem perturbações em direções de busca adequadas uma vez que o vetor nulo não é solução desta restrição. Para este caso não é necessária a introdução de perturbações.

**soluções conhecidas:**

*soluções locais:*  $x_1 = [3.137409 \quad 1.7074 \quad 3.49783 \quad 0]^T; f(x_1) = 955.751; \lambda_1 = [1.338167$   
 $0.3855211]^T \rightarrow Z^T H Z = \text{PD}$   
 $x_2 = [4.2417 \quad 1.8471 \quad -1.8964 \quad 0]^T; f(x_1) = 980.7934; \lambda_2 = [0.2806406$   
 $0.7566639]^T \rightarrow Z^T H Z = \text{ND}$   
 $x_3 = [-0.8215 \quad 4.078 \quad 2.7830 \quad 0]^T; f(x_1) = 964.39; \lambda_3 = [0.5758305$   
 $0.7697495]^T \rightarrow Z^T H Z = \text{ND}$   
 $x_4 = [-0.5605 \quad 4.592 \quad -1.898 \quad 0]^T; f(x_1) = 955.427; \lambda_4 = [1.3508$   
 $0.38578]^T \rightarrow Z^T H Z = \text{PD}$

#### EXEMPLO 4

**referência:** (Ryoo & Sahinidis, 1995)

$$\begin{aligned} \min & -x_1 - x_2 + \frac{1}{2} x_3^2 \\ \text{s.a. } & x_1 x_2 \leq 4 \\ & (0, 0, -\infty) \leq x \leq (6, 4, \infty) \end{aligned}$$

*caracterização das funções:*

**função objetivo:** linear

**restrições:** quadráticas e lineares  
 Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

*estatística do problema:*

$$\begin{aligned} X^0 &= \mathbb{R}^3 \\ \text{NVAR} &= 2 \\ \text{NEQ} &= 0 \\ \text{NIQ} &= 5 \end{aligned}$$

NTERM = 8

DD = 5

GD = 6

***estimativas iniciais e parâmetros:***

*da literatura:*  $x_a = [0 \ 0 \ 0]^T$

$x_b = [3 \ 2 \ 0]^T$

$\varepsilon_P$ :  $5 \times 10^{-5}$

ITMAX: 300

*observações:* para a estimativa inicial correspondente ao vetor nulo o gradiente da primeira restrição será nulo. O pacote MINOS não converge para esta estimativa inicial.

***soluções conhecidas:***

*solução global:*  $[6 \ 0.66667 \ 0]^T$ ;  $\mu = [0.167 \ 0.889 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

*solução local:*  $[2 \ 2 \ 0]^T$ ;  $\mu = [0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

## EXEMPLO 5

**referência:** (Ryoo & Sahinidis, 1995)

$$\min x_3 + \frac{1}{2} x_4^2$$

$$s. a. -x_3 + 250 + 30x_1 - 6x_1^2 = 0$$

$$-x_3 + 300 + 20x_2 - 12x_2^2 = 0$$

$$-x_3 + 150 + 0.5(x_1 + x_2)^2 = 0$$

$$(0; 0; 0; -\infty) \leq x \leq (9.422; 5.903; 267.42; \infty)$$

***caracterização das funções:***



**função objetivo:** linear

**restrições:** quadráticas e lineares  
Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

*estatística do problema:*

$$X^0 = \mathbb{R}^4$$

$$\text{NVAR} = 3$$

$$\text{NEQ} = 3$$

$$\text{NIQ} = 6$$

$$\text{NTERM} = 19$$

$$\text{DD} = 15$$

$$\text{GD} = 3$$

*estimativas iniciais e parâmetros:*

*literatura:*  $x_a = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

$$x_b = [4.7 \ 2.95 \ 133.7 \ 0]^T$$

*propostas:*  $x_c = [9.422 \ 5.903 \ 267.42 \ 0]^T$

$\epsilon_P:$   $5 \times 10^{-5}$

**ITMAX:** 300

*observações:* Escolheu-se o vetor nulo como estimativa inicial porque problemas de convergência podem existir para determinados algoritmos apresentados na literatura. Note que o número de restrições de igualdade é igual à dimensão real do problema. Assim, quando do uso de um procedimento de decomposição as restrições de limites poderão ser ignorados, como é o caso do algoritmo apresentado em Schmid & Biegler (1994). O programa MINOS não converge para a estimativa inicial  $x_a$ .

*soluções conhecidas:*

*solução global:*  $[6.2934 \ 3.8218 \ 201.16]^T$

## EXEMPLO 6

**referência:** (Ryoo & Sahinidis, 1995)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + \frac{1}{2} x_3^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & (-2, -2, -\infty) \leq x \leq (2, 2, \infty) \end{aligned}$$

**caracterização das funções:**

**função objetivo:** linear

**restrições:** quadráticas e lineares  
Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

**estatística do problema:**

$$X^0 = \mathbb{R}^3$$

$$\text{NVAR} = 2$$

$$\text{NEQ} = 0$$

$$\text{NIQ} = 8$$

$$\text{NTERM} = 18$$

$$\text{DD} = 15$$

$$\text{GD} = 5$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

da literatura:  $x_a = [0 \ 0 \ 0]^T$

$x_b = [-2 \ -2 \ 0]^T$

$x_c = [2 \ 2 \ 0]^T$

$\varepsilon_P$ :  $5 \times 10^{-5}$

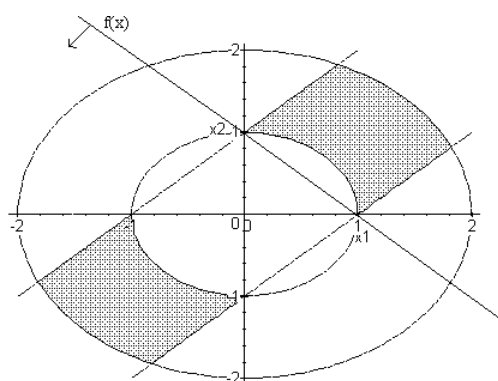
ITMAX: 300

***soluções conhecidas:***

***solução global:***  $[-1.414214 \ -1.414214 \ 0]^T$

***solução local:***  $x_I = [1 \ 0 \ 0]^T$

**Observações:** existem restrições que apresentam gradiente nulo no ponto  $x_a$ .



**figura A.1:** representação do exemplo 6

## EXEMPLO 7

**referência:** (Ryoo & Sahinidis, 1995)

$$\begin{aligned}
& \min x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2} x_6^2 \\
& s.a. \quad 100000(x_4 - 100) - 120x_1(300 - x_4) = 0 \\
& \quad 100000(x_5 - x_4) - 80x_2(400 - x_5) = 0 \\
& \quad 100000(500 - x_5) - 40x_3(600 - 500) = 0 \\
& \quad (0,0,0,100,100,-\infty) \leq x \leq (15834,36250,10000,300,400,+\infty)
\end{aligned}$$

***caracterização das funções:***

**função objetivo:** linear

**restrições:** quadráticas e lineares  
Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

***estatística do problema:***

$$X^0 = \mathbb{R}^6$$

$$NVAR = 5$$

$$NEQ = 3$$

$$NIQ = 10$$

$$NTERM = 24$$

$$DD = 18$$

$$GD = 2$$

***estimativas iniciais e parâmetros:***

*da literatura:*  $x_a = [9700 \ 18125 \ 5000 \ 200 \ 25 \ 0]^T$

$$x_b = [0 \ 0 \ 0 \ 100 \ 100 \ 0]^T$$

$\varepsilon_p:$   $5 \times 10^{-4}$

$\varepsilon_v:$   $1 \times 10^{-7}$

ITMAX: 300

***soluções conhecidas:***

*solução global:*         $[579.31 \quad 1360.0 \quad 5110.0 \quad 182.02 \quad 295.60 \quad 0]^T$

***escalonamento efetuado:***

$$\sigma_H = [10^{-5} \quad 10^{-5} \quad 10^{-5}]$$

## EXEMPLO 8

**referências:** Ryoo & Sahinidis, 1995; Floudas & Pardalos, 1990

$$\min x_1^{0.6} + x_2^{0.6} - 6x_1 - 4x_3 + 3x_4 + \frac{1}{2} x_5^2$$

$$s.a. -3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_2 + 2x_4 \leq 4$$

$$(0,0,0,0,-\infty) \leq x \leq (3,4,2,1,\infty)$$

***caracterização das funções:***

**função objetivo:** exponencial

**restrições:** lineares

Existem restrições de limites.

**continuidade:** as restrições e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ . A função objetivo é contínua em  $X^0$ . No ponto  $x_1=0$  ou  $x_2=0$  a função objetivo é não diferenciável.

***estatística do problema:***

$$X^0 = \mathbb{R}_+^5$$

$$\text{NVAR} = 4$$

$$\text{NEQ} = 1$$

---

NIQ	=	10
NTERM	=	22
DD	=	17
GD	=	8

***estimativas iniciais e parâmetros:***

*da literatura:*  $x_a = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

$$x_b = [1.5 \ 2 \ 1 \ 0.5 \ 0]^T$$

*proposta:*  $x_c = [3 \ 4 \ 2 \ 1 \ 0]^T$

$\epsilon_p$ :  $5 \times 10^{-5}$

ITMAX: 300

observações: no ponto  $x_a$  a matriz Hessiana e o gradiente da função objetivo são infinitos.

***soluções conhecidas:***

*solução global:*  $[1.3333 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

*solução estacionária:*  $x_s = [0.04929 \ 4 \ 1.284 \ 0 \ 0]^T$  (não é ponto de mínimo).

**EXEMPLO 9**

**referência:** (Ryoo & Sahinidis, 1995)

$$\min 29.4x_1 + 18x_2 + \frac{1}{2}x_3^2$$

$$s.a. \ x_1 - 0.2458 \frac{x_1^2}{x_2} \geq 6$$

$$(0, a, -\infty) \leq x \leq (115.8, 30, \infty)$$

onde,  $a$  é uma constante. Na referência  $a$  é tomado como sendo 0. Nós consideramos o valor de  $10^{-5}$  por questões numéricas.

**caracterização das funções:**

**função objetivo:** linear

**restrições:** lineares e divisão de polinômios.

Existem restrições de limites.

**continuidade:** A primeira restrição de desigualdade não é contínua em  $x_2=0$ .

**estatística do problema:**

$$X^o = \mathbb{R}^3_+ - \{x_2 = 0\}$$

$$\text{NVAR} = 2$$

$$\text{NEQ} = 0$$

$$\text{NIQ} = 5$$

$$\text{NTERM} = 9$$

$$\text{DD} = 6$$

$$\text{GD} = 10$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

da literatura:  $x_a = [0 \quad 10^{-5} \quad 0]^T$

$$x_b = [57.9 \quad 15 \quad 0]^T$$

$\varepsilon_P:$   $5 \times 10^{-5}$

$\varepsilon_V:$   $1 \times 10^{-5}$

ITMAX: 300

**observações:** Os Ryoo & Sahinidis (1995) consideram que  $x_2$  é definida sobre um espaço fechado. Note que esta definição não é adequada, uma vez que existe uma descontinuidade em  $x_2=0$  daí a nossa inclusão do parâmetro  $a$ . O pacote MINOS não converge para  $x_a$ . A implementação numérica deve ser feita com cuidado, uma vez que valores pequenos de  $x_2$  negativos

fazem com que a primeira restrição vá para o infinito. O número elevado de iterações se deve sobretudo a problemas numéricos.

***soluções conhecidas:***

*solução global:*  $[8.1706 \ 7.5602 \ 0]^T$

## EXEMPLO 10

**referência:** (Ryoo & Sahinidis, 1995)

$$\begin{aligned}
 & \min -x_4 + \frac{1}{2} x_7^2 \\
 & s.a. \ x_1 - 1 + k_1 x_1 x_5 = 0 \\
 & \quad x_2 - x_1 + k_2 x_2 x_6 = 0 \\
 & \quad x_3 + x_1 - 1 + k_3 x_3 x_5 = 0 \\
 & \quad x_4 - x_3 + x_2 - x_1 + k_4 x_4 x_6 = 0 \\
 & \quad x_5^{0.5} + x_6^{0.5} \leq 4 \\
 & \quad (0,0,0,0,0,-\infty) \leq x \leq (1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 16, \ 16, \ 0)
 \end{aligned}$$

onde, os valores das constantes são dadas na A1.

**Tabela A.1:** Valores das constantes das funções do exemplo 10

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
0.09755988	$0.99 \times k_1$	0.0391908	$0.9 \times k_3$

***caracterização das funções:***

**função objetivo:** linear



**restrições:** exponenciais, quadráticas e lineares

Existem restrições de limites.

**continuidade:** Existe uma restrição que embora contínua sobre  $X^0$  é não diferenciável em  $x_1=0$  e  $x_2=0$ . As demais funções, seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

***estatística do problema:***

$$X^0 = \mathbb{R}^7_+$$

$$\text{NVAR} = 6$$

$$\text{NEQ} = 4$$

$$\text{NIQ} = 13$$

$$\text{NTERM} = 31$$

$$\text{DD} = 24$$

$$\text{GD} = 10$$

***estimativas iniciais e parâmetros:***

*da literatura:*  $x_a = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

$$x_b = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 8 \ 8 \ 0]^T$$

*proposta:*  $x_c = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0]^T$

$\epsilon_P:$   $5 \times 10^{-5}$

$\text{ITMAX}:$  300

***soluções conhecidas:***

*solução global:*  $[0.771462 \ 0.516997 \ 0.204234 \ 0.388892 \ 3.036504 \ 5.096052 \ 0]^T$

*solução local:*  $x_1 = [0.9626122 \ 0.4592021 \ 0.03681358 \ 0.3857779 \ 0.3981134 \ 11.35042 \ 0]^T$

$$x_2 = [0.39048 \ 0.39048 \ 0.37462 \ 0.37462 \ 16 \ 0 \ 0]^T$$

$$x_3 = [1 \ 0.39287 \ 0 \ 0.3881020 \ 16 \ 0 \ 0]^T$$

*observações:* este problema apresenta inúmeras soluções ótimas locais.

**EXEMPLO 11**

**referência:** (Psiaki & Park, 1995)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 + \frac{1}{2} x_3^2 \\ \text{s.a.} \quad & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + 10000(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 - 0.0625 \leq 0 \end{aligned}$$

**caracterização das funções:**

**função objetivo:** linear

**restrições:** polinomial  
Inexistem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

**estatística do problema:**

$$X^0 = \mathbb{R}^3$$

$$\text{NVAR} = 2$$

$$\text{NEQ} = 0$$

$$\text{NIQ} = 1$$

$$\text{NTERM} = 8$$

$$\text{DD} = 5$$

$$\text{GD} = 18$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

$$\text{da literatura:} \quad [0 \ 0.99 \ 0]^T$$

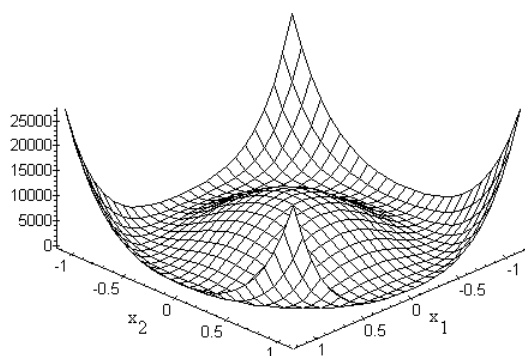
$$\epsilon_P: \quad 5 \times 10^{-5}$$

$$\text{ITMAX:} \quad 300$$

*observações:* a restrição de desigualdade apresenta curvatura acentuada como pode ser visto na figura A.1. O código NPSOL (Gill et ali, 1986) não converge para este exemplo (Psiaki & Park, 1995). O número de iterações do algoritmo proposto por Psiaki & Park (1995) é 73. Note que este número é também dependente do critério de parada adotado. Para as simulações foram considerados dois casos, um em que a função objetivo original não foi escalonada e outro em que se efetuou um escalonamento, a saber,  $\sigma_F=0.1$ .

*soluções conhecidas:*

*solução global:*  $[0.9687 \ -0.2481 \ 0]^T$



**figura A.2:** representação da região viável do exemplo 11

## EXEMPLO 12

**referência:** (Psiaki & Park, 1995)

$$\begin{aligned}
& \min \frac{1}{2} \{ (x_4 - x_2)(x_3 - x_1) + x_8^2 \} \\
& s.a. (x_6 - x_4)(x_3 - x_1) - (x_5 - x_1)(x_2 - x_4) = 0 \\
& \quad x_5 - x_7(x_4 - x_2) = 0 \\
& \quad x_6 - x_7(x_3 - x_1) = 0 \\
& \quad -x_5^2 - x_6^2 + 1 \leq 0 \\
& \quad x_j + 1 \leq 0; j = 1, 2 \\
& \quad -x_j \leq 0; j = 3, 4, 5, 6, 7
\end{aligned}$$

**caracterização das funções:**

**função objetivo:** quadrática

**restrições:** quadráticas e lineares  
Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

**estatística do problema:**

$$X^0 = \mathbb{R}^8$$

$$\text{NVAR} = 6$$

$$\text{NEQ} = 3$$

$$\text{NIQ} = 8$$

$$\text{NTERM} = 28$$

$$\text{DD} = 21$$

$$\text{GD} = 0$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

da literatura:  $x_a = [-2 \ -3 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 0.7 \ 0]^T$

$$x_b = [-2 \ -3 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 0]^T$$

propostas:  $x_c = [-2 \ -3 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 0 \ 0]^T$

$$x_d = [-5 \ -5 \ 3 \ 4 \ 5 \ 8 \ 2 \ 0]^T$$

$$x_e = [-1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$x_f = [-5 \ -9 \ 10 \ 9 \ 11 \ 0 \ -0.4 \ 0]^T$$

$$x_h = [0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0]^T$$

$$\varepsilon_P: \quad 5 \times 10^{-5}$$

$$\text{ITMAX:} \quad 300$$

*observações:* para  $x_a$ , o número de iterações requerido pelo algoritmo de Psiaki & Park (1995) é de 14. O algoritmo deles não converge para o segundo ponto. Os demais pontos propostos foram escolhidos arbitrariamente, para testar a capacidade de convergência do algoritmo. Os autores citam ainda que o algoritmo NPSOL (Gill et al, 1986) não converge para  $x_a$  e  $x_b$ .

***soluções conhecidas:***

$$\text{solução global:} \quad [-1 \ -1 \ 2.41 \ 2.41 \ 0.707 \ 0.707 \ 0.207 \ 0]^T$$

### EXEMPLO 13

**referência:** (Psiaki & Park, 1995)

$$\min x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_5^2$$

$$\text{s.a.} \quad \frac{(x_1 x_3 + x_2 x_4)^2}{x_1^2 + x_2^2} - x_3^2 - x_4^2 + 1 = 0$$

$$-x_1 + x_3 + 1 \leq 0$$

$$-x_2 + x_4 + 1 \leq 0$$

$$-x_3 + x_4 \leq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

***caracterização das funções:***

**função objetivo:** quadrática

**restrições:** lineares e divisão de polinômios quadráticos.

Existem restrições de limites.

**continuidade:** A menos de uma restrição, as demais funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre  $IR^5$ . A primeira restrição não é definida em  $x_2=x_1=0$ .

**estatística do problema:**

$$X^0 = IR^5 - \{x_2=x_1=0\}$$

$$NVAR = 4$$

$$NEQ = 1$$

$$NIQ = 4$$

$$NTERM = 17$$

$$DD = 12$$

$$GD = 8$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

*da literatura:*  $x_a = [3 \ 4 \ 2 \ 1 \ 0]^T$

$\varepsilon_P:$   $5 \times 10^{-5}$

ITMAX: 300

*observações:* para a estimativa inicial o gradiente da restrição de igualdade é um vetor nulo e o código NPSOL (Gill et al, 1986) não irá convergir. O algoritmo de Psiaki & Park (1995) converge em 15 iterações.

**soluções conhecidas:**

*solução global:*  $[3.4142 \ 3.4142 \ 2.414214 \ 1.0 \ 0]^T$

Os valores dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade na solução ótima do problema são:  $[4.82 \ 6.82 \ 0 \ 0 \ 6.82]^T$

## EXEMPLO 14

**referência:** (Dembo, 1976)

$$\begin{aligned}
 & \min c_1 x_3^2 + c_2 x_1 x_5 + c_3 x_1 + c_4 + \frac{1}{2} x_6^2 \\
 & s.a. c_5 x_3 x_5 + c_6 x_2 x_5 + c_7 x_1 x_4 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_8 x_2 x_5 + c_9 x_1 x_4 + c_{10} x_3 x_5 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{11} x_2^{-1} x_5^{-1} + c_{12} x_1 x_5^{-1} + c_{13} x_2^{-1} x_3^2 x_5^{-1} - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{14} x_2 x_5 + c_{15} x_1 x_2 + c_{16} x_3^2 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{17} x_3^{-1} x_5^{-1} + c_{18} x_1 x_5^{-1} + c_{19} x_4 x_5^{-1} - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{20} x_3 x_5 + c_{21} x_1 x_3 + c_{22} x_3 x_4 - 1 \leq 0 \\
 & \quad l \leq x \leq u
 \end{aligned}$$

onde, as constantes e os limites são dados nas tabelas A.2 e A.3, respectivamente.

**Tabela A.2:** Constantes do modelo do exemplo 14

$j$	$c_j$	$j$	$c_j$	$j$	$c_j$	$j$	$c_j$
1	5.35785470	7	-0.00000734	13	-0.30585975	19	-0.40583930
2	0.83568910	8	0.000853007	14	0.00024186	20	0.00029955
3	37.239239	9	0.00009395	15	0.00010159	21	0.00007992
4	-40792.1410	10	-0.00033085	16	0.00007379	22	0.00012157
5	0.00002584	11	1330.32937	17	2275.132693		
6	-0.00006663	12	-0.42002610	18	-0.26680980		

**Tabela A.3:** Valores dos limites das variáveis do exemplo 14

variável	limite superior	limite inferior
$x_1$	102.0	78.0
$x_2$	45.0	33.0
$x_3$	45.0	27.0
$x_4$	45.0	27.0
$x_5$	45.0	27.0

**caracterização das funções:**

**função objetivo:** quadrática

**restrições:** problema geométrico.

Existem restrições de limites.

**continuidade:** existem pontos em  $\mathbb{R}^6$  para os quais algumas das funções não são definidas. Sobre  $X^0$  todas as funções são contínuas.

*estatística do problema:*

$$X^0 = \mathbb{R}^6 - \{0\}$$

$$\text{NVAR} = 5$$

$$\text{NEQ} = 0$$

$$\text{NIQ} = 16$$

$$\text{NTERM} = 38$$

$$\text{DD} = 32$$

$$\text{GD} = 0$$

*estimativas iniciais e parâmetros:*

*da literatura:*  $x_a = [78.62 \ 33.44 \ 31.077 \ 44.18 \ 35.22 \ 0]^T$

*propostas:*  $x_b = [70 \ 35 \ 35 \ 40 \ 30 \ 0]^T$

$$x_c = [78 \ 33 \ 27 \ 27 \ 27 \ 0]^T$$

$$x_d = [102 \ 45 \ 45 \ 45 \ 45 \ 0]^T$$

$\epsilon_p:$   $5 \times 10^{-4}$

ITMAX: 300

*soluções conhecidas:*

*solução global:*  $[78 \ 33 \ 29.996 \ 45.004 \ 36.775 \ 0]^T$

## EXEMPLO 15

**referência:** (Dembo, 1976)



$$\begin{aligned}
 & \min c_1x_1 + c_2x_1x_6 + c_3x_3 + c_4x_2 + c_5 + c_6x_3x_5 + \frac{1}{2}x_8^2 \\
 & s. a. c_7x_6^2 + c_8x_1^{-1}x_3 + c_9x_6 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{10}x_1x_3^{-1} + c_{11}x_1x_3^{-1}x_6 + c_{12}x_1x_3^{-1}x_6^2 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{13}x_6^2 + c_{14}x_5 + c_{15}x_4 + c_{16}x_6 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{17}x_5^{-1} + c_{18}x_5^{-1}x_6 + c_{19}x_4x_5^{-1} + c_{20}x_5^{-1}x_6^2 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{21}x_7 + c_{22}x_2x_3^{-1}x_4^{-1} + c_{23}x_2x_3^{-1} - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{24}x_7^{-1} + c_{25}x_2x_3^{-1}x_7^{-1} + c_{26}x_2x_3^{-1}x_4^{-1}x_7^{-1} - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{27}x_5^{-1} + c_{28}x_5^{-1}x_7 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{29}x_5 + c_{30}x_7 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{31}x_3 + c_{32}x_1 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{33}x_1x_3^{-1} + c_{34}x_3^{-1} - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{35}x_2x_3^{-1}x_4^{-1} + c_{36}x_2x_3^{-1} - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{37}x_4 + c_{38}x_2^{-1}x_3x_4 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{39}x_1x_6 + c_{40}x_1 + c_{41}x_3 - 1 \leq 0 \\
 & \quad c_{42}x_1^{-1}x_3 + c_{43}x_1^{-1} + c_{44}x_6 - 1 \leq 0 \\
 & l \leq x \leq u
 \end{aligned}$$

onde, as constantes e os limites são dados nas tabelas A.4 e A.5, respectivamente.

**Tabela A.4:** Constantes do modelo do exemplo 15

$j$	$c_j$	$j$	$c_j$	$j$	$c_j$	$j$	$c_j$
1	1.715	12	-0.0066033	23	-25.125634	34	0.8196720
2	0.035	13	0.00066173269	24	161.18996	35	24500.0
3	4.0565	14	0.017239878	25	5000.0	36	-250.0
4	10.0	15	-0.0056595559	26	-489510.0	37	0.010204082
5	3000.0	16	-0.019120592	27	44.333333	38	0.000012244898
6	-0.063	17	56.85075	28	0.330	39	0.00006250
7	0.0059553571	18	1.08702	29	0.0225560	40	0.00006250
8	0.88392857	19	0.32175	30	-0.0075950	41	-0.00007625
9	-0.1175625	20	-0.03762	31	0.000610	42	1.22
10	1.1088	21	0.006198	32	-0.0005	43	1.0
11	0.1303533	22	2462.3121	33	0.8196720	44	-1.0

**Tabela A.5:** Valores dos limites das variáveis do exemplo 15

variável	limite inferior	limite superior
$x_1$	1.0	2000.0
$x_2$	1.0	120.0
$x_3$	1.0	5000.0
$x_4$	85.0	93.0
$x_5$	90.0	95.0
$x_6$	3.0	12.0
$x_7$	145.0	162.0

***caracterização das funções:*****função objetivo:** quadrática**restrições:** problema geométrico.  
Existem restrições de limites.**continuidade:** as funções são contínuas no espaço  $X^0$ , embora não sejam definidas para alguns pontos de  $IR^8$ .***estatística do problema:***

$$X^0 = IR^8 - \{0\}$$

$$NVAR = 7$$

$$NEQ = 0$$

$$NIQ = 42$$

$$NTERM = 72$$

$$DD = 64$$

$$GD = 0$$

***estimativas iniciais e parâmetros:***

$$da\ literatura: \quad x_a = [1745 \ 110 \ 3048 \ 89 \ 92 \ 8 \ 145 \ 0]^T$$

$\varepsilon_P$ :  $5 \times 10^{-5}$

ITMAX: 300

*soluções conhecidas:*

*solução global:* [1698.5277 53.525721 3031.5798 90.090923 95 10.519239  
153.53535 0]<sup>T</sup>

*escalonamento efetuado:*

As variáveis de decisão foram normalizadas.

A função objetivo e as restrições foram escalonadas como:

$$\sigma_F = 0.01$$

$$\sigma_G = [1 \ 1 \ 10 \ 10 \ 10 \ 5 \ 20 \ 1 \ 1 \ 1 \ 5 \ 5 \ 1 \ 0.2]$$

*observações adicionais:* após o escalonamento as restrições de limites foram substituídas pelos limites [0,1].

### EXEMPLO 16

**referência:** (Dembo, 1976)

$$\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \frac{1}{2} x_9^2$$

$$s. a. c_4 x_1^{-1} x_4 x_6^{-1} + c_5 x_6^{-1} + c_6 x_1^{-1} x_6^{-1} - 1 \leq 0$$

$$c_7 x_2^{-1} x_5 x_7^{-1} + c_8 x_4 x_7^{-1} + c_9 x_2^{-1} x_4 x_7^{-1} - 1 \leq 0$$

$$c_{10} x_3^{-1} x_8^{-1} + c_{11} x_5 x_8^{-1} + c_{12} x_3^{-1} x_5 x_8^{-1} - 1 \leq 0$$

$$c_{13} x_4 + c_{14} x_6 - 1 \leq 0$$

$$c_{15} x_5 + c_{16} x_7 + c_{17} x_4 - 1 \leq 0$$

$$c_{18} x_8 + c_{19} x_5 - 1 \leq 0$$

$$l \leq x \leq u$$

onde, as constantes e os limites são dados nas tabelas A.6 e A.7, respectivamente.

**Tabela A.6:** Constantes do modelo do exemplo 16

$j$	$c_j$	$j$	$c_j$	$j$	$c_j$	$j$	$c_j$
1	1.0	6	-83333.333	11	1.0	16	0.0025
2	1.0	7	1250.0	12	-2500.0	17	-0.0025
3	1.0	8	1.0	13	0.0025	18	0.01
4	833.33252	9	-1250.0	14	0.0025	19	-0.01
5	100.0	10	1250000.0	15	0.0025		

**Tabela A.7:** Valores dos limites das variáveis do exemplo 16

variável	limite superior	limite inferior
$x_1$	10000.0	100.0
$x_2$	10000.0	1000.0
$x_3$	10000.0	1000.0
$x_4$	1000.0	10.0
$x_5$	1000.0	10.0
$x_6$	1000.0	10.0
$x_7$	1000.0	10.0
$x_8$	1000.0	10.0

**caracterização das funções:**

**função objetivo:** linear

**restrições:** problema geométrico  
Existem restrições de limites.

**continuidade:** as funções são contínuas no espaço  $X^0$ .

**estatística do problema:**

$$X^0 = \mathbb{R}^9 - \{0\}$$

$$\text{NVAR} = 8$$

NEQ	=	0
NIQ	=	22
NTERM	=	41
DD	=	32
GD	=	0

***estimativas iniciais e parâmetros:***

*da literatura:*  $x_a = [5000 \ 5000 \ 5000 \ 200 \ 350 \ 150 \ 225 \ 425 \ 0]^T$

$\varepsilon_P$ :  $5 \times 10^{-5}$

ITMAX: 300

***soluções conhecidas:***

*solução global:*  $[579.26 \ 1359.97 \ 5109.97 \ 182.02 \ 295.60 \ 217.98 \ 286.42 \ 395.60 \ 0]^T$

***escalonamento efetuado:***

As variáveis originais do problema foram adimensionalizadas e a variável artificial foi escalonada pelo fator 0.1.

A função objetivo e as restrições foram escalonadas como segue:

$$\sigma_F = 0.01$$

$$\sigma_G = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0.5]$$

*observações adicionais:* após o escalonamento as restrições de limites foram substituídas pelos limites  $[0,1]$ . Para as simulações, este exemplo foi dividido em 2, a saber, exemplos 16a e 16b. O exemplo 16a é tal como aqui descrito. No exemplo 16b as restrições de desigualdade foram transformadas em restrições de igualdade.

Os limites nas variáveis são artificiais e obedecem as recomendações de Dembo (1976). Os limites foram introduzidos para auxiliar o condicionamento numérico.

### EXEMPLO 17

**referência:** (Floudas & Pardalos, 1990)

$$\begin{aligned}
 & \min x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2} x_9^2 \\
 & s.a. -1 + 0.0025(x_4 + x_6) \leq 0 \\
 & \quad -1 + 0.0025(-x_4 + x_5 + x_7) \leq 0 \\
 & \quad -1 + 0.01(-x_5 + x_8) \leq 0 \\
 & \quad 100x_1 - x_1x_6 + 833.33252x_4 - 83333.333 \leq 0 \\
 & \quad x_2x_4 - x_2x_7 - 1250x_4 + 1250x_5 \leq 0 \\
 & \quad x_3x_5 - x_3x_8 - 2500x_5 + 1250000 \leq 0 \\
 & \quad l \leq x \leq u
 \end{aligned}$$

onde, os limites são dados na tabela A.8.

**Tabela A.8:** Valores dos limites das variáveis do exemplo 17

variável	limite superior	limite inferior
$x_1$	10000	100
$x_2$	10000	1000
$x_3$	10000	1000
$x_4$	1000	10
$x_5$	1000	10
$x_6$	1000	10
$x_7$	1000	10
$x_8$	1000	10

*caracterização das funções:*

**função objetivo:** linear

**restrições:** quadráticas e lineares  
Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

**estatística do problema:**

$$X^0 = \mathbb{R}^9$$

$$\text{NVAR} = 8$$

$$\text{NEQ} = 0$$

$$\text{NIQ} = 22$$

$$\text{NTERM} = 41$$

$$\text{DD} = 32$$

$$\text{GD} = 2$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

**propostas:**  $x_a = [100 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 0]^T$

$$x_b = [10000 \ 100000 \ 100000 \ 1000 \ 1000 \ 1000 \ 1000 \ 1000 \ 0]^T$$

$\epsilon_P:$   $5 \times 10^{-4}$

**ITMAX:** 300

**soluções conhecidas:**

**solução global:**  $[579.35 \ 1360.1 \ 5109.8 \ 182.02 \ 295.62 \ 217.98 \ 286.41 \ 395.61 \ 0]^T$

**escalonamento efetuado:**

As restrições foram escalonadas como:

$$\sigma_G = [1000 \ 1000 \ 200 \ 0.02 \ 0.005 \ 0.001]$$

**EXEMPLO 18**

**referência:** (Biegler & Cuthrell, 1985)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 + \frac{1}{2} x_3^2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_2 + 2x_1^2 - x_1^3 \leq 0 \\ & -x_2 + 2(1-x_1)^2 - (1-x_1)^3 \leq 0 \end{aligned}$$

**caracterização das funções:**

**função objetivo:** linear

**restrições:** polinomiais.

Inexistem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

**estatística do problema:**

$$X^0 = \mathbb{R}^3$$

$$\text{NVAR} = 2$$

$$\text{NEQ} = 0$$

$$\text{NIQ} = 2$$

$$\text{NTERM} = 9$$

$$\text{DD} = 6$$

$$\text{GD} = 2$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

$$\begin{aligned} \text{propostas:} \quad & x_a = [0 \ 0 \ 0]^T \\ & x_b = [0.8 \ 10 \ 0]^T \\ & x_c = [-0.6 \ 1 \ 0]^T \end{aligned}$$



$$x_d = [1.7 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$\varepsilon_P: \quad 5 \times 10^{-5}$$

$$\text{ITMAX:} \quad 300$$

***soluções conhecidas:***

$$\text{solução global:} \quad [0.5 \quad 0.375 \quad 0]^T$$

$$\text{solução estacionária: } x_1 = [-0.618034 \quad 1 \quad 0]^T; \mu = [0.27 \quad 0.72 \quad 0]^T \text{ (solução de mínimo local)}$$

$$x_2 = [1.618034 \quad 1 \quad 0]^T; \mu = [0.72 \quad 0.27 \quad 0]^T \text{ (solução de mínimo local)}$$

$$x_1 = [1.333333 \quad 1.185185 \quad 0]^T; \mu = [1 \quad 0 \quad 0]^T \text{ (solução de máximo local)}$$

## EXEMPLO 19

**referência:** (Ryoo & Sahinidis, 1995)

$$\min 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3^2$$

$$s.t. -16x_1x_2 + 1 \leq 0$$

$$-4x_1^2 - 4x_2^2 + 1 \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 1$$

***caracterização das funções:***

**função objetivo:** linear

**restrições:** quadráticas e lineares

Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

***estatística do problema:***

$$X^0 = \mathbb{R}^3$$

---

NVAR	=	2
NEQ	=	0
NIQ	=	6
NTERM	=	11
DD	=	8
GD	=	6

***estimativas iniciais e parâmetros:***

*da literatura:*  $x_a = [10^{-5} \ 0 \ 0]^T$   
 $x_b = [0.5 \ 0.5 \ 0]^T$

$\varepsilon_P$ :  $5 \times 10^{-5}$

ITMAX: 300

*observações:* na estimativa  $x_a$  adotamos  $10^{-5}$  ao invés de 0 por questões numéricas, já que os gradientes das funções não lineares serão nulos para  $x=0$ .

***soluções conhecidas:***

*solução global:*  $[0.1294096 \ 0.4829625]^T$ ;  $\mu = [0.2410 \ 0.1294 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ;  $f=0.7418$

*solução estacionária:*  $x_1 = [0.4829625 \ 0.1294096 \ 0]^T$ ;  $\mu = [0.0470 \ 0.482993 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ;  
 $f=1.095335$

$x_2 = [0.4472136 \ 0.2236068 \ 0]^T$ ;  $f=1.118034$

*observações:* A solução  $x_1$  é de mínimo local, enquanto que  $x_2$  é uma solução de máximo local.

**EXEMPLO 20**

**referência:** (Ryoo & Sahinidis, 1995)

$$\begin{aligned} \min & -2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_3^2 \\ \text{s.t.} & 4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0 \\ & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

***caracterização das funções:***

**função objetivo:** quadrática

**restrições:** quadráticas e lineares  
Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

***estatística do problema:***

$$X^0 = \mathbb{R}^3$$

$$\text{NVAR} = 2$$

$$\text{NEQ} = 0$$

$$\text{NIQ} = 1$$

$$\text{NTERM} = 9$$

$$\text{DD} = 6$$

$$\text{GD} = 0$$

***estimativas iniciais e parâmetros:***

**propostas:**  $x_a = [0 \ 0 \ 0]^T$

$$x_b = [1 \ 1 \ 0]^T$$

**$\epsilon_P$ :**  $5 \times 10^{-5}$

**ITMAX:** 300

**observações:** Este exemplo é particularmente interessante, pois à medida em que  $\mu$  é elevado na estimativa inicial para  $x_a$  ou quando o Hessiano é iniciado com a matriz identidade, temos que a programação quadrática é resolvida como:

- inicia-se o procedimento com as duas primeiras restrições ativas. O valor de  $\mu$  para a primeira é negativo e esta é retirada.
- Na próxima iteração da PQ temos que o sistema de (KT) é de posto não pleno e impossível. A primeira restrição é retirada.

- Na próxima iteração se obtém a solução do problema da PQ irrestrito, que é viável, porém nula e o algoritmo SQP falha.

Outra curiosidade é que para o problema em que se transforma a restrição não linear em uma de igualdade por meio da introdução de uma variável de folga ( $x_4$ ), estes problemas não ocorrem. O que ocorre é que à medida em que  $\mu$  se torna muito elevado, o algoritmo SQP não irá convergir, pois sempre retornará a um problema da PQ crítico.

***soluções conhecidas:***

*solução global:*  $[0.5 \ 0.5 \ 0]^T$

## EXEMPLO 21

**referência:** (Ryoo & Sahinidis, 1995)

$$\begin{aligned} \min & -12x_1 - 7x_2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 \\ \text{s.t.} & -2x_1^4 - x_2 + 2 = 0 \\ & 0 \leq x \leq (2, 3, +\infty) \end{aligned}$$

***caracterização das funções:***

**função objetivo:** quadrática

**restrições:** polinomiais

Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

***estatística do problema:***

$$X^o = \mathbb{R}^3$$

$$\text{NVAR} = 2$$

$$\text{NEQ} = 1$$

$$\text{NIQ} = 4$$

$$\text{NTERM} = 10$$

$$\text{DD} = 8$$

$$\text{GD} = 0$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

$$\begin{aligned} \text{propostas:} \quad x_a &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ x_b &= [1 \ 1.5 \ 0]^T \\ x_c &= [-3.535534 \ -3.535534 \ 0]^T \\ \varepsilon_P: \quad &5 \times 10^{-5} \\ \text{ITMAX:} \quad &300 \end{aligned}$$

**soluções conhecidas:**

$$\text{solução global:} \quad [0.717536 \ 1.469842 \ 0]^T$$

## EXEMPLO 22

**referência:** (Ryoo & Sahinidis, 1995)

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{100} (35x_1^{0.6} + 35x_2^{0.6}) + \frac{1}{2} x_4^2 \\ \text{s.t.} \quad & 600x_1 - 50x_3 - x_1x_3 + 5000 = 0 \\ & 600x_2 + 50x_3 - 15000 = 0 \\ & (0, 0, 100, -\infty) \leq x \leq (34, 17, 300, +\infty) \end{aligned}$$

**caracterização das funções:**

**função objetivo:** exponencial

**restrições:** quadráticas e lineares  
Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as restrições e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ . O gradiente da função objetivo é descontínuo em  $x_1=0$  ou  $x_2=0$ .

**estatística do problema:**

$$X^0 = \mathbb{R}^4$$

$$\text{NVAR} = 3$$

$$\text{NEQ} = 2$$

$$\text{NIQ} = 6$$

$$\text{NTERM} = 15$$

$$\text{DD} = 11$$

$$\text{GD} = 8$$

**estimativas iniciais e parâmetros:**

*da literatura:*  $x_a = [0 \ 0 \ 100 \ 0]^T$

$$x_b = [17 \ 8.5 \ 200 \ 0]^T$$

*propostas:*  $x_c = [0 \ 5 \ 150 \ 0]^T$

$$x_d = [10 \ 10 \ 150 \ 0]^T$$

$\epsilon_P:$   $5 \times 10^{-5}$

$\epsilon_V:$   $1 \times 10^{-5}$

ITMAX: 300

**soluções conhecidas:**

*solução global:*  $[0 \ 16.66667 \ 100]^T$

*solução estacionária:*  $x_1 = [33.3333 \ 0 \ 300 \ 0]^T$

*observações:* a solução  $x_I$  não é solução de mínimo local. Neste EXEMPLO um fato curioso ocorre. Quando  $\mu^I \neq 0$  para problemas da PQ inviáveis ou críticos, temos que os valores dos multiplicadores das restrições de igualdade ( $\lambda$ ) são afetados. Isto é incoerente para este caso, já que as restrições de desigualdade são lineares e impor um valor para os multiplicadores de Lagrange das restrições inequações diferente de nulo, significa perturbar as estimativas “corretas” dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade, o que afeta a função objetivo do problema da PQ e conseqüentemente a convergência do algoritmo. Ainda,  $x_s$  na tabela do capítulo 5 neste caso indica uma solução não ótima viável, para a qual a direção de busca gerada na programação quadrática é nula (resolve-se um problema de PQ reduzido irrestrito).

*escalonamento efetuado:*

A função objetivo foi escalonada como:  $\sigma_F = 0.01$

### EXEMPLO 23

**referência:** Psiaki & Park (1995)

$$\min -x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3^2$$

$$s.a. x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 4 \leq 0$$

$$-2x_1 + x_2 - 2 \leq 0$$

*caracterização das funções:*

**função objetivo:** linear

**restrições:** quadráticas e lineares

Inexistem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

*estatística do problema:*

$$X^0 = \mathbb{R}^3$$

$$\text{NVAR} = 2$$

$$\text{NEQ} = 0$$

$$\text{NIQ} = 3$$

$$\text{NTERM} = 12$$

$$\text{DD} = 9$$

$$\text{GD} = 6$$

***estimativas iniciais e parâmetros:***

$$\text{da literatura: } [2 \ 0 \ 0]^T$$

$$\varepsilon_P: 5 \times 10^{-5}$$

$$\text{ITMAX: } 300$$

*observações:* o algoritmo NPSOL (Gill et ali, 1986) converge em 6 iterações, bem como o de Psiaki & Park (1995)

***soluções conhecidas:***

$$\text{solução local: } [0.7071 \ 0.7071 \ 0]^T$$

## EXEMPLO 24

**referência:** modificado de Lasdon (1970)

$$\min x_1^2 + 0.25x_2^2 - 2x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3^2$$

$$\text{s. a. } -x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

$$-(1-x_1)^3 + x_2 \leq 0$$

***caracterização das funções:***

**função objetivo:** quadrática

**restrições:** polinomiais



Existem restrições de limites.

**continuidade:** todas as funções e seus gradientes e Hessianos são contínuos sobre o espaço  $X^0$ .

*estatística do problema:*

$$X^0 = \mathbb{R}^3$$

$$\text{NVAR} = 2$$

$$\text{NEQ} = 0$$

$$\text{NIQ} = 3$$

$$\text{NTERM} = 9$$

$$\text{DD} = 6$$

$$\text{GD} = 0$$

*estimativas iniciais e parâmetros:*

*da literatura:*  $x_a = [0 \ 0 \ 0]^T$

$$\varepsilon_P: 5 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_V: 1 \times 10^{-6}$$

$$\text{ITMAX}: 300$$

*observações:* na solução ótima os gradientes das restrições ativas são linearmente dependentes.

*soluções conhecidas:*

*solução local:*  $[0.7071 \ 0.7071 \ 0]^T$