Economia Regional e Urbana (Economia Espacial)

Prof. Vladimir Fernandes Maciel

Atividade para a nota

Suponha a seguinte matriz de insumos (demandas intermediárias) em valores monetários ($) entre dois setores e duas regiões de um país:

		Norte		Sul	
		Agroindústria	Serviços	Agroindústria	Serviços
Norte	Agroindústria	5	6	1	2
	Serviços	8	7	3	4
Sul	Agroindústria	3	4	6	7
	Serviços	8	6	8	9

Sabe-se também que as demandas finais pelos produtos dos setores de cada região são:

	Norte	Sul
Agroindústria	4	6
Serviços	5	9

Aplique os conhecimentos da técnica de análise de matriz insumo-produto vista em aula para responder as seguintes perguntas:

1. Qual é a matriz interregional de coeficientes técnicos?
2. Qual é o sistema de equações que descreve o equilíbrio interregional desse país (conforme os dados apresentados)?
3. Qual(is) setor(es) de qual(is) região(ões) apresenta(m) maior necessidade de insumos adquiridos em outra região? Por quê?
4. O que se pode dizer sobre o relacionamento entre as regiões? É forte ou fraco? Por quê?
5. Calcule o impacto no Valor Bruto da Produção de cada setor de cada região se a demanda final do setor de serviços da região Sul crescer para o nível de $10 em decorrência de uma política pública.

Lembretes de Álgebra Matricial

Como calcular determinantes

Determinantes de segunda ordem:

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, denotado por $|A|$, é calculado como:

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (Eq. 1)

Determinantes de terceira ordem:

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é calculado como:

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$ (Eq. 2)

Um modo simples de calcular determinantes de terceira ordem consiste em repetir as duas primeiras colunas da matriz ao seu lado e multiplicar as três diagonais com três elementos de cima para baixo com sinal positivo; e multiplicar as três diagonais com três elementos de baixo para cima com sinal negativo. (vide figura 1)

Figura 1 - Um modo de calcular determinantes de 3ª ordem

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \\ & & + & + & + \end{array}$$

Determinantes de enésima ordem - Expansão de Laplace:

Para calcular o determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a três pela expansão de Laplace, escolha uma linha ou uma coluna da matriz.
Por exemplo, a 1º linha da matriz *A*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$|A| = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| + a_{14}|C_{14}|$ (Eq. 3)

Onde:
$|C_{ij}|$ é o cofator do elemento a_{ij} e é obtido a partir da expressão:
$|C_{ij}| = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ (Eq. 4)

Onde $|M_{ij}|$ é o menor do elemento a_{ij}. O menor é um subdeterminante da matriz *A* obtido pela eliminação da i-ésima linha e da j-ésima coluna.

Por exemplo:

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{(Eq. 5)}$$

E o cofator de a_{11} é:
$|C_{11}| = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}|$, pois *i* + *j* é um número positivo.

Como inverter matrizes

Para inverter matrizes, efetue os seguintes procedimentos:

a) Calcule o determinante da matriz para verificar se esta é não-singular (ou seja, verificar se o determinante é diferente de zero).

b) Se a matriz é não-singular, monte a matriz de cofatores (C) (onde cada a_{ij} é substituído pelo seu respectivo cofator $|C_{ij}|$).

c) Encontre a matriz adjunta (C') (que é a transposta da matriz de cofatores).

d) Multiplique a matriz adjunta pelo inverso do determinante da matriz original.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad |A| = 99 \therefore \exists A^{-1}$$

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 6 & -9 \\ -7 & 31 & 3 \\ 5 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$C'\frac{1}{|A|} = \begin{bmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{bmatrix} . \frac{1}{99} = \begin{bmatrix} 0{,}21 & -0{,}07 & 0{,}05 \\ 0{,}06 & 0{,}31 & -0{,}08 \\ -0{,}09 & 0{,}03 & 0{,}12 \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Dado um sistema de equações *Ax* = *d*, onde *A* é n x n, a solução pode ser escrita como:

$$\bar{x} = A^{-1}d = \frac{1}{|A|}(C')d \quad \text{(Eq. 6)}$$

Desde que *A* seja não singular. Isto significa que:

$$\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \dots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \cdots & |C_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \cdots & |C_{mn}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d_1|C_{11}| + d_2|C_{21}| + \cdots + d_n|C_{n1}| \\ d_1|C_{12}| + d_2|C_{22}| + \cdots + d_n|C_{n2}| \\ \vdots \\ d_1|C_{1n}| + d_2|C_{2n}| + \cdots + d_n|C_{nm}| \end{bmatrix} \quad \text{(Eq. 7)}$$

Igualando-se os elementos correspondentes dos dois lados da equação 7, obtemos as soluções:

$$\overline{x_1} = \left(\frac{1}{|A|}\right)\left(d_1|C_{11}| + d_2|C_{21}| + \cdots + d_n|C_{n1}|\right) \quad \text{(Eq. 8)}$$

$$\overline{x_2} = \left(\frac{1}{|A|}\right)\left(d_1|C_{12}| + d_2|C_{22}| + \cdots + d_n|C_{n2}|\right) \quad \text{(Eq. 9)}$$

E assim por diante.

O segundo elemento entre parênteses do lado direito da equação 8 é calculado substituindo a primeira coluna de *A* pelo vetor coluna *d*, conservando intactos todos os demais elementos. A matriz obtida a partir deste procedimento é chamada de $|A_1|$ - onde o subscrito 1 indica que a primeira coluna foi substituída por *d*.

O segundo elemento entre parênteses do lado direito da equação 9 é calculado substituindo a segunda coluna de *A* pelo vetor coluna *d*, conservando intactos todos os demais elementos. E assim por diante.

Para se achar o valor da solução da j-ésima variável $\overline{x_j}$, segundo a Regra de Cramer, substitui-se a j-ésima coluna do determinante $|A|$ pelos termos constantes $d_1 \cdots d_n$, obtendo-se o novo determinante $|A_j|$ e, então, divide-se $|A_j|$ pelo determinante original $|A|$. Portanto, a solução do sistema *Ax =d* pode ser expressa como:

$$\overline{x_j} = \frac{|A_j|}{|A|} \quad \text{(Eq. 10)}$$

Referência Bibliográfica

CHIANG, A. C. **Matemática para economistas**. São Paulo: Makron Books, 2004.